Olimpiada Națională de Matematică 2015

Etapa locală – Iași, 23 ianuarie 2015

CLASA A IX A

Problema 1. Să se rezolve ecuațiile:

a) $|x^2-3x+2|=\left|\left|x-\frac{1}{3}\right|-\frac{2}{3}\right|$, $x\in\mathbf{R}$;

b) $\left[\frac{n-1}{2}\right]+\left[\frac{n^2-n}{3}\right]=n, n\in\mathbb{Z}$, unde $[x]$ este partea întreagă a numărului x.

Problema 2. Fie $x_1,x_2,\ldots,x_n,a>0$ cu $\sum_{i=1}^{n}x_i=a$. Dacă $x_1=x_{n+1}$, arătați că:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^3}{x_i^2+x_{i+1}^2}\geq\frac{a}{2}$$

Problema 3. Fie $\triangle ABC$ cu G și I centrul de greutate, respectiv centrul cercului înscris în $\triangle ABC$, iar M un punct în planul triunghiului. Să se demonstreze:

a) $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}=3\cdot\overrightarrow{MG}$

b) $a\overrightarrow{MA}+b\overrightarrow{MB}+c\overrightarrow{MC}=(a+b+c)\cdot\overrightarrow{MI}$, cu notațiile $a=BC, b=AC, c=AB$.

c) Dacă $\vec{v}=a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}$ și $\vec{u}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}$, să se arate că vectorii $\vec{v}$ și $\vec{u}$ sunt coliniari și $3\cdot|\vec{v}|=(a+b+c)\cdot|\vec{u}|$

Problema 4. Pe laturile $[AB],[BC],[CD],[DA]$ ale paralelogramului $ABCD$ se consideră punctele M, N, P și respectiv Q.

a) Arătați că $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{QP}$ este coliniar cu $\overrightarrow{AC}\Leftrightarrow\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{MQ}$ este coliniar cu $\overrightarrow{BD}$.

b) Indicați 4 puncte M, N, P, Q pentru care echivalența de la punctul a) are loc.

Timp de lucru 3 ore.
Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică 2015

Etapa locală – Iaşi, 23 ianuarie 2015

CLASA a X-a

Subiectul 1.

a) Calculați $(\sqrt{5}-1)^3$.

b) Determinați câte numere naturale nenule n verifică inegalitatea:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}+\frac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{(n+1)^2}+\sqrt[3]{n(n+1)}+\sqrt[3]{n^2}}<1-2\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}.$$

Subiectul 2.

Dacă $a_k\in(0,1)$, $k=\overline{1,n}$, $n\in\mathbb{N}^*$, demonstrați inegalitatea:

$$\log_{a_1}\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}+\log_{a_2}\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}+\ldots+\log_{a_n}\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}}\geq n.$$

Subiectul 3.

a) Dacă $a,z,z'\in\mathbb{C}$, arătați că $|z+a|+|z'+a|\geq|z-z'|$.

b) Dacă $a,z\in\mathbb{C},|z|=1,n\in\mathbb{N}^*$, arătați că $\sum_{k=1}^{2n}|z^k+a|\geq n|z-1|$.

Subiectul 4.

Fie A un punct al cercului cu centrul în originea reperului cartezian xOy și de rază 1, astfel încât $\mu(\widehat{xOA})=\frac{\pi}{6}$.

a) Determinați ecuația binomă de grad minim, având coeficienți reali, pentru care una dintre rădăcini să fie afixul punctului A;

b) Aflați aria poligonului cu vârfurile A_k, unde A_k sunt imaginile geometrice ale ecuației de la punctul a).

Timp de lucru 3 ore.
Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică 2015

Etapa locală – Iaşi, 23 ianuarie 2015

CLASA a XI-a

Subiect 1

Determinați numerele reale a şi b astfel încât: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2-x+a}-b}{x-2}=\dfrac{3}{4}$.

Subiect 2

Considerăm matricea $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ şi şirul $(x_n)_{n\geq 0}$ definit prin $x_{n+2}=x_{n+1}+x_n, n\in N, x_0=0, x_1=1$

a) Arătați că $A^n=\begin{pmatrix}x_{n-1} & x_n\\ x_n & x_{n+1}\end{pmatrix}$, pentru orice $n\in N^*$.

b) Arătați, folosind eventual punctul a), că $x_{n+1}x_{n-1}-x_n^{\,2}=(-1)^n$, pentru orice $n\in N^*$.

Subiect 3

Fie matricea $A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$ şi $C(A)=\{X\in M_3(C)/\, A\cdot X=X\cdot A\}$

a) Arătați că dacă $X\in C(A)$, atunci există $a,b,c\in C$ astfel încât $X=\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ b & a & 0\\ c & b & a\end{pmatrix}$.

b) Demonstrați că ecuația $X^3=O_3$ are o infinitate de soluții în $M_3(C)$.

c) Arătați că ecuația $X^3=A$ nu are soluții în $M_3(C)$.

Subiect 4

Considerăm şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ si propozițiile :

(P_1) Şirul $x_n=a_{n+1}-a_n, n\in N^*$ este convergent la zero.

(P_2) Şirul $y_n=\max(a_n,a_{n+1}), n\in N^*$ este convergent

(P_3) Şirul $(a_n)_{n\geq 1}$ este convergent.

Arătați că:

a) P_1 nu implică P_3

b) P_2 nu implică P_3

c) P_1 şi P_2 implică P_3.

Timp de lucru 3 ore.
Fiecare subiect este notat cu 7 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică 2015

Etapa locală – Iaşi, 23 ianuarie 2015

CLASA A XII-A

Problema 1

Fie funcția $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x-1+\sin x-\cos x}{x+e^{x+2015}+\sin x}$. Determinați primitiva $F:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ a funcției f, ştiind că $F(0)=1$.

Problema 2

Pe intervalul $G_a=(a,+\infty)$ cu $a\in\mathbb{R}$, se defineşte legea de compoziție $*: G_a\times G_a\to G_a$ prin $x*y=xy-ax-ay+a^2+a$.

a) Demonstrați că $(G_a,*)$ este grup abelian.

b) Demonstrați că oricare ar fi numărul real a, grupul $(G_a,*)$ este izomorf cu grupul $(\mathbb{R}_+^*,\cdot)$ al numerelor reale pozitive în raport cu înmulțirea.

c) Calculați $x_*^n=\underbrace{x*x*\ldots*x}_{n\text{ ori}}$, $n\in\mathbb{N}^*$.

Problema 3

Fie $(G,\cdot)$ un grup finit cu n elemente, $n\in\mathbb{N}, n\geq 2$. Dacă funcțiile $f_k:G\to G$, $f(x)=x^k, k\in\{1,2,\ldots,n-1\}$ sunt automorfisme ale grupului $(G,\cdot)$, demonstrați că n este număr prim.

Problema 4

Determinați funcțiile derivabile $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ care îndeplinesc simultan următoarele condiții:

(1) derivata f' este continuă şi $0<f'(x)\leq 1$, oricare ar fi $x\in[0,1]$;

(2) $f(0)=0$

şi

(3) pentru o primitivă F a funcției f^2 cu $F(0)=0$, avem $F(1)=\dfrac{f^3(1)}{3}$.

Notă: Timp de lucru: 3 ore. Pentru fiecare problemă se acordă de la 0 la 7 puncte.